# Das dB und Du – Logarithmen für ein glückliches Leben

## *dBs als relative Größe*

Schon in grauen Inschenörsvorzeiten als ein Taschenrechner noch aus zwei beweglichen Holzleisten mit eingeschnitzten Kerben bestand, gab es eine wichtige Motivationsquelle im täglichen Ingenieursleben: die *Faulheit*. Der Taschenrechner hieß Rechenschieber und nutzte logarithmische Skalen, um Multiplikationen auf Additionen zurückzuführen. Und schon lange bevor Motörhead die ersten Knallschäden hervorrief, waren *Leistung* bzw. die Verstärkung oder Dämpfung von Leistung eines Systems ein wichtiges Kriterium. Da das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsleistung je nach System über viele Größenordnungen variieren kann, stauchte man den Wertebereich durch Einführung des Logarithmus kurzerhand zusammen. Bei Verstärkungsketten brauchte man die Teilverstärkungen jetzt nicht mehr zu multiplizieren, sondern konnte die logarithmierten Teilbeiträge addieren. Das logarithmierte (zur Basis 10) Verhältnis der Leistungen nannte man **Bel** zu Ehren Alexander Bells. Gebräuchlicher ist sein kleinen Bruder (dividiert durch 10) - das **Dezibel**:

$$G[\mathrm{B}] = \log_{10}\frac{P_2}{P_1} \text{ bzw. } G[\mathrm{dB}] = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} \tag{1}$$

**Beispiel:** Eine 10000fache Leistungsverstärkung (z.B. 1mW Eingangs-, 10W Ausgangsleistung) entspricht 40dB (oder 4 Bel).

## *dBs als absolute Maßeinheit*

Alles war einfach und übersichtlich, bis man die Leistungsverstärkung auch durch das Verhältnis von *Spannungen* ausdrücken wollte:

$$G[\mathrm{dB}] = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} = 10\log_{10}\left(\frac{V_2^2}{R_2}\frac{R_1}{V_1^2}\right) = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1}\cdot\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \tag{2}$$

Diese Formel ist extrem praktisch, weil mit der gleichen Maßzahl *G* Leistungs- und Spannungsverstärkung eines Systems beschrieben werden können. Speziell in der HF-Technik sind Eingangs- und Ausgangsimpedanzen häufig gleich, dann wird (2) noch einfacher, da der Wurzelterm 1 ist. Beliebte Fehler sind, diese Vereinfachung auch dann zu verwenden, wenn $R_1 \neq R_2$ ist oder die Vorfaktoren 10 und 20 zu verwechseln.

**Beispiel:** Eine Verstärkung von 6dB entspricht einem Leistungsverhältnis von 4 und einem Spannungsverhältnis von 2.

Richtig unübersichtlich wurde es aber erst, als das dB auch noch als absolute Maßeinheit in Konkurrenz zu Volt und Watt trat. Da dB's immer Verhältnisse beschreiben, braucht man hier einen Leistungs- oder Spannungspegel als *Referenzpegel*. In der Hochfrequenztechnik ist z.B. **dBm** als Maßeinheit weit verbreitet, das sich auf einen Pegel von 1mW bezieht (nicht immer nur bei 50Ω):

$$P[\mathrm{dBm}] = 10\log_{10}\frac{P}{1\,\mathrm{mW}} \Leftrightarrow P = 10^{\frac{P[\mathrm{dBm}]}{10}}\cdot 1\,\mathrm{mW} \tag{3}$$

**Beispiel:** +33dBm entsprechen einer Leistung von 2W (verwendete Impedanz beliebig).

Zur Bezeichnung von Spannungspegeln wird gerne **dBV** verwendet, das sich auf einen Pegel von 1V bezieht:

$$V[\mathrm{dBV}] = 20\log_{10}\frac{V}{1\,\mathrm{V}} \Leftrightarrow V = 10^{\frac{V[\mathrm{dBV}]}{20}}\cdot 1\,\mathrm{V} \tag{4}$$

Normalerweise bedeutet dBV die Effektivspannung bezogen auf $1V_{rms}$, aber in manchen Fällen (z.B. in Cadence Spectre RF) ist mit dBV die Amplitude (Spitzenspannung) bezogen auf $1V_{pk}$ gemeint. Daher sollte man immer angeben, welche Definition gemeint ist ($dBV_{pk}$ oder $dBV_{rms}$).

Die beste Chance, Fehler zu machen, hat man bei der Umrechnung der verschiedenen Maßeinheiten ineinander, z.B. bei der Umrechnung zwischen dBm und dBV:

$$
\begin{aligned}
P[\mathrm{dBm}] &= 10\log_{10}\frac{V_{pk}^2}{2\cdot R\cdot 1\,\mathrm{mW}} = 10\log_{10}\frac{\left(10^{\frac{V[\mathrm{dBVpk}]}{20}}\cdot 1\,\mathrm{V}\right)^2}{2\cdot R\cdot 1\,\mathrm{mW}} = 10\log_{10}\frac{10^{\frac{V[\mathrm{dBVpk}]}{10}}}{2\cdot 10^{-3}\cdot R\,[\Omega]} \\
&= V[\mathrm{dBV_{pk}}] - 10\log_{10}(2\cdot 10^{-3}\cdot R\,[\Omega]) \\
&= V[\mathrm{dBV_{pk}}] + 10\mathrm{dB}\ \text{ für } R = 50\Omega
\end{aligned}
$$

**Beispiel:** 1 $V_{pk}$ an 50Ω entspricht einer Leistung von +10 dBm.

Der RMS- oder Effektivwert einer sinusförmigen Spannung ist um √2 oder 3dB niedriger als ihr Spitzenwert, die entsprechende Umrechnung lautet daher:

$$P[\mathrm{dBm}] = V[\mathrm{dBV_{rms}}] - 10\log_{10}(10^{-3}\cdot R\,[\Omega]) = V[\mathrm{dBV_{rms}}] + 13\mathrm{dB}\ \text{ für } R = 50\Omega \qquad (6)$$

Um im Cadence Framework direkt dBm als Amplitude in Spannungsquellen einzugeben, benötigt man die Umrechnung von dBm in $V_{pk}$:

$$V_{pk}[\mathrm{V}] = \sqrt{10^{\frac{P[\mathrm{dBm}]}{10}}\cdot 2\cdot R\cdot 1\,\mathrm{mW}} = 10^{\frac{P[\mathrm{dBm}]}{20}}\cdot\sqrt{2\cdot 10^{-3} R[\Omega]}\ \mathrm{V} = 10^{\frac{P[\mathrm{dBm}]-10}{20}}\ \mathrm{V}\ \text{ für } R = 50\Omega \qquad (7)$$

**Wichtig:** Diese Spannung muss noch verdoppelt werden, wenn eine ideale Spannungsquelle mit nachgeschaltetem Abschlusswiderstand in der Simulation verwendet wird: Die Angabe in dBm bezieht sich immer auf die *maximal abgebbare* Leistung, also bei Abschluß der Quelle mit dem Innenwiderstand! In diesem Fall bricht die Leerlaufspannung auf die Hälfte zusammen.

| **Verstärkung** | | | **Signalpegel** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **G[dB]** | **$P_2/P_1$** | **$V_2/V_1$** | **P[dBm]** | **P[W]** | **V[$dBV_{rms}$], 50Ω** | **$V_{rms}$ [V], 50Ω** | **V[$dBV_{pk}$], 50Ω** | **$V_{pk}$ [V], 50Ω** |
| -3 | 0.5 | 0.71 | -30 | $10^{-6}$ | -43 | 7.1mV | -40 | 10mV |
| 0 | 1 | 1 | -20 | $10^{-5}$ | -33 | 22mV | -30 | 32mV |
| 3 | 2 | 1.41 | -10 | $10^{-4}$ | -23 | 71mV | -20 | 0.1 |
| 6 | 4 | 2 | -6 | $2.5\cdot 10^{-4}$ | -19 | 0.11 | -16 | 0.16 |
| 7 | 5 | 2.2 | -3 | $7.4\cdot 10^{-4}$ | -16 | 0.16 | -13 | 0.22 |
| 10 | 10 | 3.16 | 0 | $10^{-3}$ | -13 | 0.22 | -10 | 0.32 |
| 20 | 100 | 10 | 10 | 0.01 | -3 | 0.71 | 0 | 1 |
| 30 | 1000 | 31.6 | 20 | 0.1 | 7 | 2.26 | 10 | 3.2 |

**Tabelle 1:** Umrechnungstabelle für verschiedene dB und dBm Werte

| nach / von | 50Ω | | | 200Ω | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | dBm | $dBV_{pk}$ | $dBV_{rms}$ | dBm | $dBV_{pk}$ | $dBV_{rms}$ |
| dBm | 0 | -10 | -13 | 0 | -4 | -7 |
| $dBV_{pk}$ | +10 | 0 | -3 | +4 | 0 | -3 |
| $dBV_{rms}$ | +13 | +3 | 0 | +7 | +3 | 0 |

**Tabelle 2:** Umrechnung zwischen verschiedenen dB Maßeinheiten (Z = 50Ω und Z = 200Ω)

## *dBs bei Phasenoise und Spurious Sidebands*

Eine weiterer Verwandter des dBs ist das **dBc** (dB bezogen auf Träger, engl. Carrier), das das Verhältnis der Leistungen bzw. Amplituden von spektralen Nebenlinien zum Träger beschreibt:

$$L[\mathrm{dBc}] = 10\log_{10}\frac{P_S}{P_C} = 20\log_{10}\frac{V_S}{V_C} \tag{8}$$

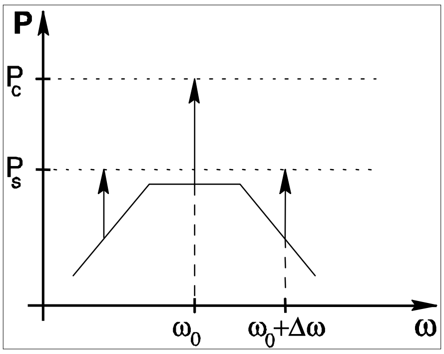


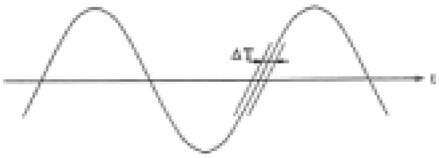

**Abb. 1: Trägersignal mit spektralen Nebenlinien und Phasenrauschen**

Ausserdem wird dBc gerne benutzt, um das Phasenrauschen im Frequenzabstand Δω vom Träger bezogen auf die Trägerleistung zu beschreiben:

$$L(\Delta\omega)[\mathrm{dBc\,(Hz)}] = 10\log_{10}\frac{P_N(\Delta\omega)}{P_C} \tag{9}$$

Phasenrauschen ist die Darstellung des Phasenjitters im Frequenzbereich. Für den Fall, dass ein Oszillator von weissem Rauschen gestört wird, läßt sich der RMS - Wert des Phasenjitters in Phasenrauschen umrechnen:

$$\mathrm{L}\,(\Delta\omega)[\mathrm{dBc\,(Hz)}] = \frac{2\pi\omega_0}{\Delta\omega^2}\left(\frac{\sigma_{\Delta T}}{T_0}\right)^2 \tag{10}$$



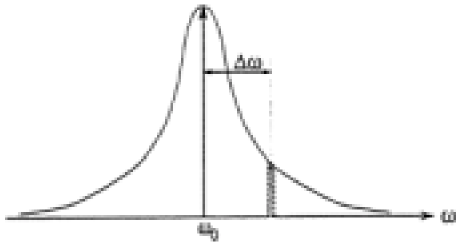




**Abb. 2: Zeitbereich: Phasenjitter Frequenzbereich: Phasenrauschen**